

Controle de Processos: *Modelagem analítica de sistemas eletromecânicos*

Prof. Eduardo Stockler Tognetti
& David Fiorillo

Laboratório de Automação e Robótica (LARA)
Dept. Engenharia Elétrica - UnB

Conteúdo

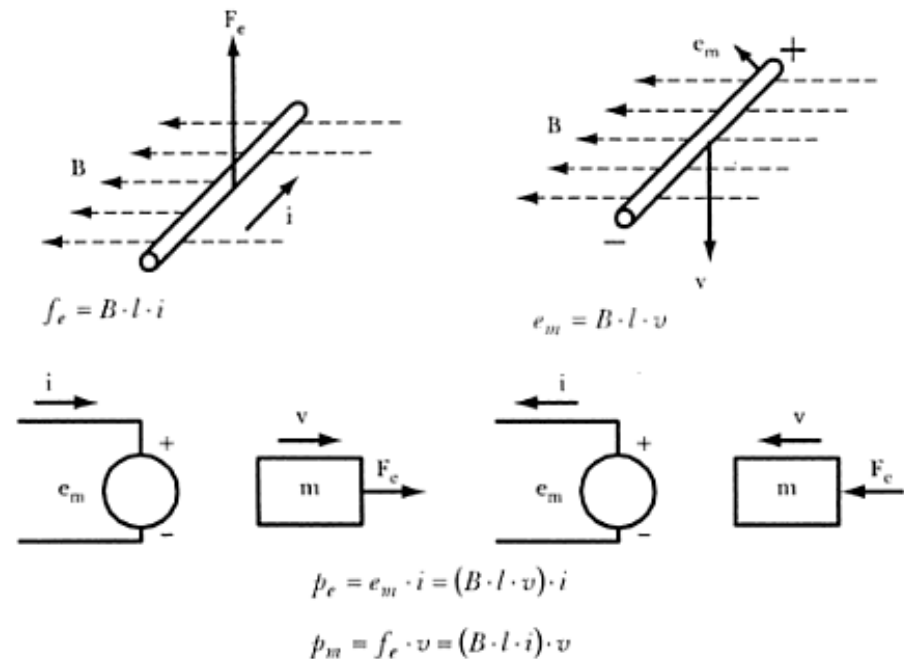
1. Introdução
2. Funcionamento de sistemas acoplados por campo magnético
3. Máquinas rotativas
4. Equações de um sistema eletromecânico
5. Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos
6. Conclusões
7. Referências

Introdução

- Sistemas eletromecânicos são dispositivos que convertem energia elétrica em mecânica e vice-versa, como:
 - Motores;
 - Geradores;
 - Alto-falantes, etc.

Funcionamento de sistemas acoplados por campo magnético

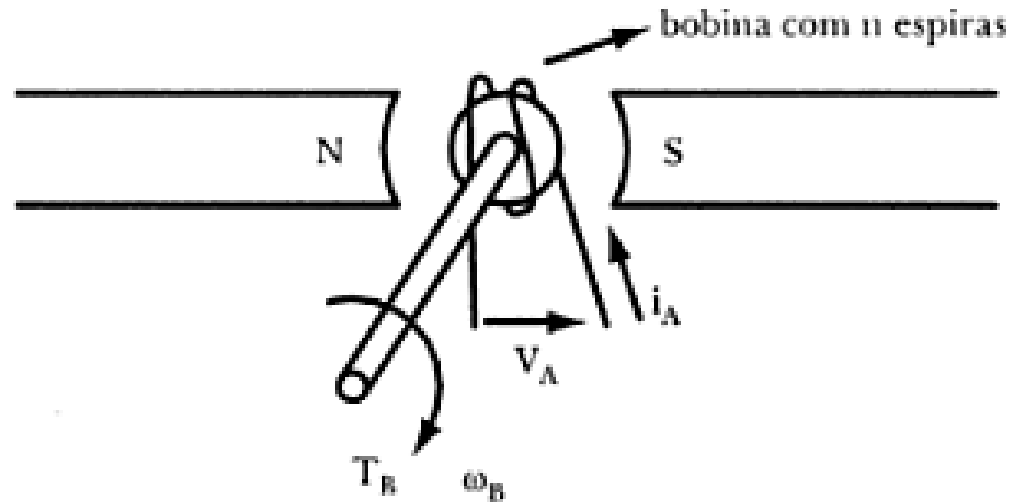
- Uma grande variedade de dispositivos eletromecânicos envolve o fluxo de correntes elétricas dentro de um campo magnético. Sabe-se que:
 - Um condutor num campo magnético que carregue uma corrente terá uma força exercida sobre ele; e
 - Uma tensão será induzida num condutor que se mova com relação ao campo magnético.
- Qualquer sistema real tem perdas advindas da resistência do condutor e do atrito entre os elementos mecânicos. Esses elementos dissipativos podem ser modelados separadamente por meio de um resistor no circuito elétrico ou de um elemento de atrito viscoso agindo na massa.



Máquinas rotativas

- A Lei de Indução de Faraday ($e = -d\lambda/dt$) descreve a indução de tensões por um campo magnético variando no tempo. A conversão eletromagnética de energia ocorre quando a mudança no fluxo é associada com um movimento mecânico. Em máquinas rotativas, as tensões são geradas nas bobinas por uma das seguintes formas:
 - Girando essas bobinas mecanicamente através de um campo magnético;
 - Girando mecanicamente um campo magnético que atravessa as bobinas; ou
 - Projetando o circuito magnético de forma que a relutância magnética varie com a rotação do motor.
- Por qualquer dos métodos citados, o fluxo atravessando uma bobina é mudado ciclicamente e uma voltagem variante no é gerada. Um grupo de tais bobinas interconectado de forma que suas tensões geradas se somem, provendo uma contribuição positiva ao resultado desejado, é chamado “enrolamento da armadura”.
- A armadura de uma máquina de corrente contínua é o elemento rotativo ou rotor, enquanto a de uma máquina de corrente alternada é o elemento estacionário ou estator.
- O circuito magnético é completado através do ferro do outro membro da máquina e bobinas de excitação ou “enrolamento de campo” são usados para agir como a fonte primária de fluxo.

Equações de um sistema eletromecânico



$$T_B = K \cdot i_A \quad \text{e} \quad V_A = K \cdot \omega_B$$

$$V_A = \text{f.c.e.m.}$$

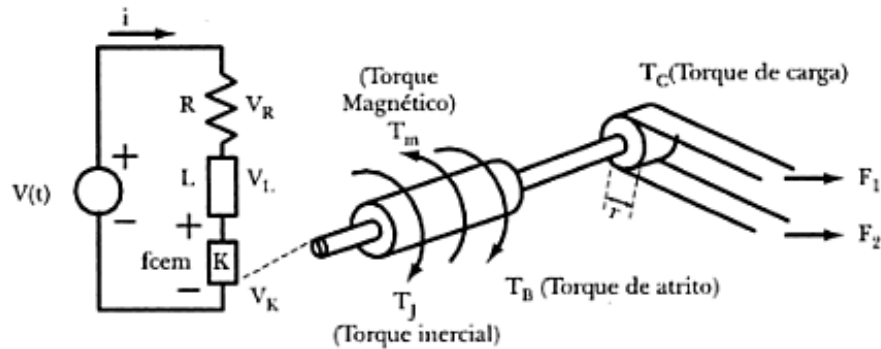
$$(i_A \rightarrow T_B) \quad (\omega_B \rightarrow V_A)$$

$$T_B = K \cdot i_A \quad \text{e} \quad \omega_B = \frac{V_A}{K} \quad (V_A \text{ se opõe a } i_A)$$

$$T_B = K \cdot i_A \quad \text{e} \quad V_A = K \cdot \omega_B$$

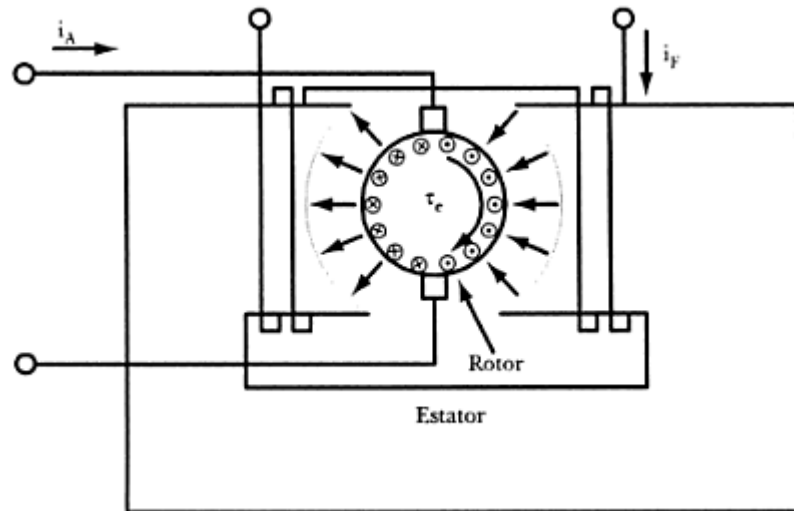
$$p = V_A \cdot i_A + T_B \cdot \omega_B = V_A \cdot i_A - K \cdot i_A \cdot \frac{V_A}{K} = 0$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



onde:

- T_m = torque magnético
- T_C = torque de carga
- T_B = torque de atrito
- T_J = torque inercial



- Lei da Tensão de Kirchhoff:

$$\sum V = 0 \rightarrow V - (V_R + V_L + V_K) = 0$$

- Equilíbrio de momentos:

$$\sum T = 0 \rightarrow T_m - (T_J + T_B + T_C) = 0$$

- Relações tensão/corrente:

$$V_R = R \cdot i \quad V_L = L \frac{di}{dt}$$

- Relações força/geometria:

$$T_J = J \frac{d\omega}{dt} \quad T_B = B \cdot \omega \quad T_C = r \cdot (F_1 - F_2)$$

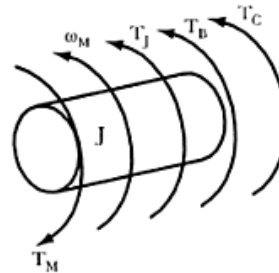
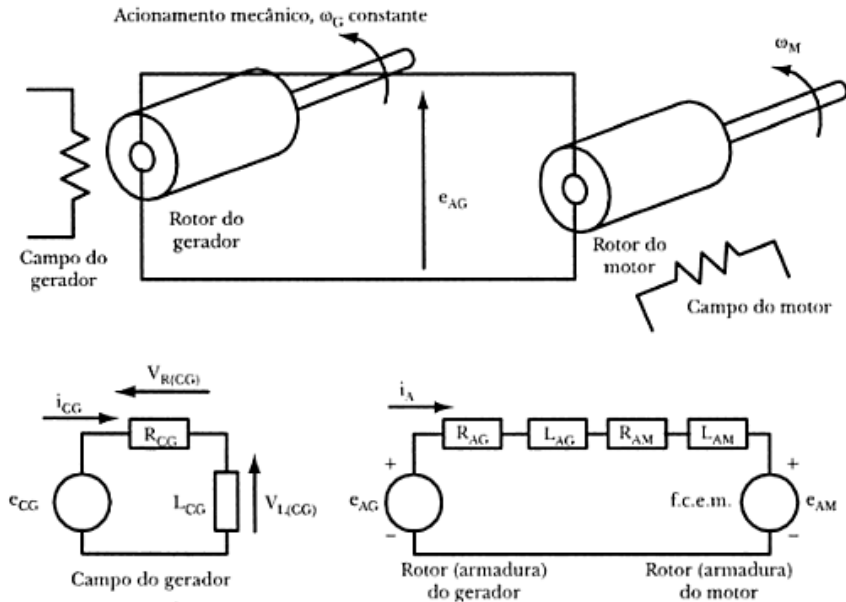
- Relações eletromecânicas:

$$V_K = K \cdot \omega \quad T_m = K \cdot i$$

$$R \cdot i + L \frac{di}{dt} + K \cdot \omega = V$$

$$K \cdot i - J \frac{d\omega}{dt} - B \cdot \omega = r \cdot (F_1 - F_2)$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



$$e_{CG} = V_{R(CG)} + V_{L(CG)}$$

$$e_{AG} = V_{R(AG)} + V_{L(AG)} + V_{R(AM)} + V_{L(AM)} + e_{AM}$$

$$T_M = T_J + T_B + T_C$$

$$V_{R(CG)} = R_{CG} \cdot i_{CG} \quad V_{L(CG)} = L_{CG} \frac{di_{CG}}{dt}$$

$$e_{AG} = K_1 \cdot \phi_G \cdot \omega_G$$

Assume-se que a rotação do gerador ω_G seja constante.

ϕ_G seja linearmente proporcional à corrente

de campo i_{CG} ($\phi_G = L_{CG} \cdot i_{CG}$)

$$e_{AG} = K_1^* \cdot i_{CG} \cdot \omega_G$$

$$K_1^* = K_1 \cdot L_{CG}$$

$$e_{AG} = K_G \cdot i_{CG}$$

$$V_{R(AG)} = R_{AG} \cdot i_A \quad V_{L(AG)} = L_{AG} \frac{di_A}{dt}$$

$$V_{R(AM)} = R_{AM} \cdot i_A$$

$$e_{AM} = K_2 \cdot \phi_M \cdot \omega_M$$

$$V_{L(AM)} = L_{AM} \frac{di_A}{dt}$$

$$T_M = K_2 \cdot \phi_M \cdot i_A$$

Assumindo-se que ($\phi_M = L_{CM} \cdot i_{CM}$)

$$e_{AM} = K_2^* \cdot i_{CM} \cdot \omega_M \quad T_M = K_2^* \cdot i_{CM} \cdot i_A$$

$$K_2^* = K_2 \cdot L_{CM}$$

Assumindo-se (i_{CM}) seja constante,

$$e_{AM} = K_M \cdot \omega_M \quad T_M = K_M \cdot i_A$$

$$T_J = J \cdot \dot{\omega}_M \quad T_B = B \cdot \omega_M$$

$$e_{CG} = R_{CG} \cdot i_{CG} + L_{CG} \frac{di_{CG}}{dt}$$

$$K_G \cdot i_{CG} = (R_{AG} + R_{AM}) \cdot i_A + (L_{AG} + L_{AM}) \frac{di_A}{dt} + K_M \cdot \omega_M$$

$$K_M \cdot i_A = J \cdot \dot{\omega}_M + B \cdot \omega_M + T_C$$

$$L_{CG} \frac{di_{CG}}{dt} + R_{CG} \cdot i_{CG} = e_{CG}$$

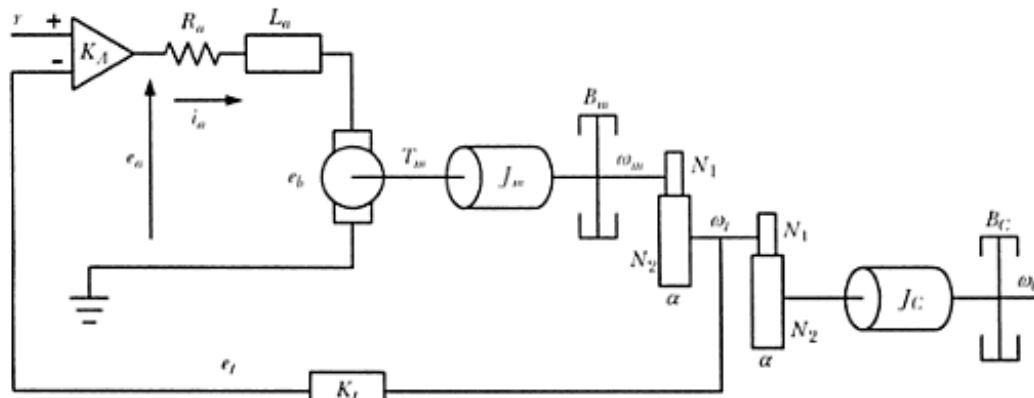
$$(L_{AG} + L_{AM}) \frac{di_A}{dt} + (R_{AG} + R_{AM}) \cdot i_A + K_M \cdot \omega_M - K_G \cdot i_{CG} = 0$$

$$J \cdot \dot{\omega}_M + B \cdot \omega_M - K_M \cdot i_A = -T_C$$

Entradas fornecidas: $e_{CG}(t)$ e $T_C(t)$

Saídas a serem calculadas: i_{CG} , i_A e ω_M

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



Tacômetro

$$R_a = 12 \text{ Ohms} \quad L_a = 10 \text{ mH}$$

$$J_m = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad B_m = 0,1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

$$J_C = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad B_C = 0,3 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

$$K_t = 8 \frac{\text{V}}{\text{rad/s}} \quad \frac{N_1}{N_2} = \alpha = \frac{1}{4} \text{ (ganho do tacômetro)}$$

$$e_a = V_R + V_L + e_b$$

$$T_m = T_{J_m} + T_{B_m} + T_C'$$

$$T_C = T_{J_C} + T_{B_C}$$

$$V_R = R_a \cdot i_a \quad V_L = L_a \frac{di_a}{dt}$$

$$T_{J_m} = J_m \cdot \dot{\omega}_m \quad T_{B_m} = B_m \cdot \omega_m \quad T_{J_C} = J_C \cdot \dot{\omega}_C$$

$$T_{B_C} = B_C \cdot \omega_C \quad T_C' = \alpha^2 \cdot T_C = \alpha^2 \cdot (T_{J_C} + T_{B_C})$$

$$e_b = K_E \cdot \omega_m \quad T_m = K_T \cdot i_a \quad e_t = K_t \cdot \omega_t$$

$$e_a = K_A \cdot r \quad (\text{em malha aberta}) \quad \text{ou}$$

$$e_a = K_A \cdot (r - e_t) \quad (\text{em malha fechada})$$

$$\omega_m = \frac{\omega_C}{\alpha^2} \quad \dot{\omega}_m = \frac{\dot{\omega}_C}{\alpha^2} \quad \omega_t = \frac{\omega_C}{\alpha}$$

Sistema em malha aberta

Parte elétrica:

$$K_A \cdot r = R_a \cdot i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_E \frac{\omega_C}{\alpha^2}$$

Parte mecânica:

$$K_T \cdot i_a = J_m \cdot \dot{\omega}_m + B_m \cdot \omega_m + \alpha^2 \cdot (J_C \cdot \dot{\omega}_C + B_C \cdot \omega_C)$$

$$K_T \cdot i_a = \left(\frac{J_m}{\alpha^2} + \alpha^2 \cdot J_C \right) \cdot \dot{\omega}_C + \left(\frac{B_m}{\alpha^2} + \alpha^2 \cdot B_C \right) \cdot \omega_C$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos

$$J = \frac{J_m}{\alpha^2} + \alpha^2 \cdot J_C \quad e \quad B = \frac{B_m}{\alpha^2} + \alpha^2 \cdot B_C$$

$$K_T \cdot i_a = J \cdot \dot{\omega}_C + B \cdot \omega_C$$

$$\therefore i_a = \frac{J \cdot \dot{\omega}_C + B \cdot \omega_C}{K_T}$$

$$K_A \cdot r = \frac{R_a \cdot (J \cdot \dot{\omega}_C + B \cdot \omega_C)}{K_T} + L_a \frac{d}{dt} \left(\frac{J \cdot \dot{\omega}_C + B \cdot \omega_C}{K_T} \right) + K_E \frac{\omega_C}{\alpha^2}$$

$$K_T \cdot K_A \cdot r = R_a \cdot J \cdot \dot{\omega}_C + R_a \cdot B \cdot \omega_C + L_a \cdot J \cdot \ddot{\omega}_C + L_a \cdot B \cdot \dot{\omega}_C + K_T \cdot K_E \frac{\omega_C}{\alpha^2}$$

$$K_T \cdot K_A \cdot r = L_a \cdot J \cdot \ddot{\omega}_C + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot \dot{\omega}_C + \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} \right) \cdot \omega_C$$

$$L_a \cdot J \cdot \ddot{\omega}_C + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot \dot{\omega}_C + \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} \right) \cdot \omega_C = K_T \cdot K_A \cdot r$$

Sistema em malha fechada

Parte elétrica:

$$K_A \cdot (r - e_t) = K_A \cdot \left(r - \frac{K_t \cdot \omega_C}{\alpha} \right) = R_a \cdot i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_E \frac{\omega_C}{\alpha^2}$$

Parte mecânica:

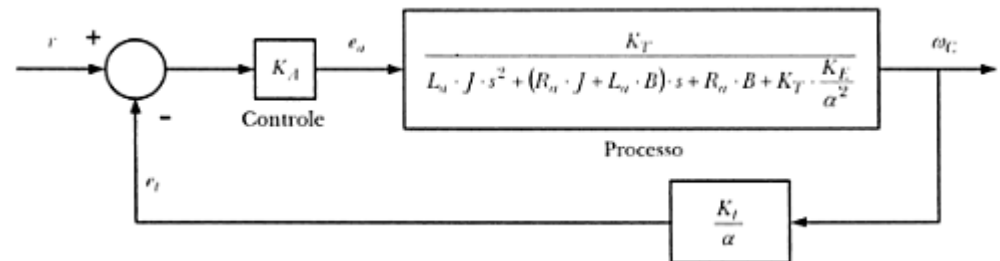
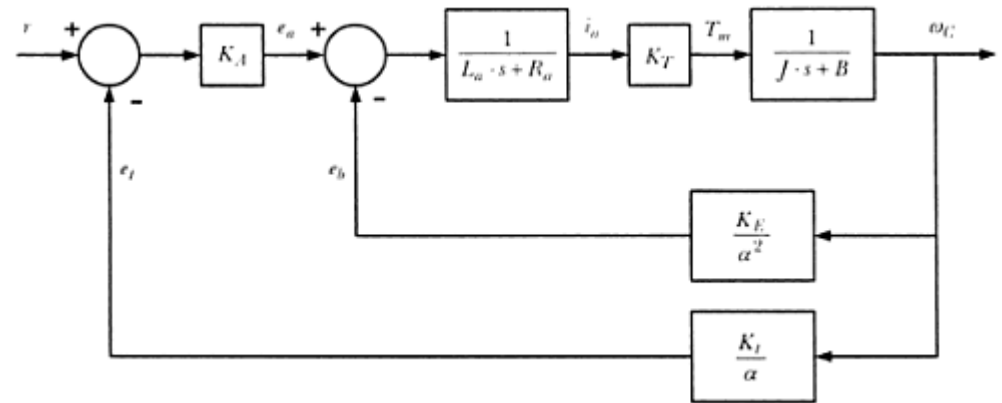
$$i_a = \frac{J \cdot \dot{\omega}_C + B \cdot \omega_C}{K_T}$$

$$K_A \cdot \left(r - \frac{K_t \cdot \omega_C}{\alpha} \right) = \frac{R_a \cdot (J \cdot \dot{\omega}_C + B \cdot \omega_C)}{K_T} + L_a \frac{d}{dt} \left(\frac{J \cdot \dot{\omega}_C + B \cdot \omega_C}{K_T} \right) + K_E \frac{\omega_C}{\alpha^2}$$

$$K_T \cdot K_A \cdot r = R_a \cdot J \cdot \dot{\omega}_C + R_a \cdot B \cdot \omega_C + L_a \cdot J \cdot \ddot{\omega}_C + L_a \cdot B \cdot \dot{\omega}_C + \left(\frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} + \frac{K_T \cdot K_A \cdot K_t}{\alpha} \right) \cdot \omega_C$$

$$K_T \cdot K_A \cdot r = L_a \cdot J \cdot \ddot{\omega}_C + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot \dot{\omega}_C + \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} + \frac{K_T \cdot K_A \cdot K_t}{\alpha} \right) \cdot \omega_C$$

$$L_a \cdot J \cdot \ddot{\omega}_C + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot \dot{\omega}_C + \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} + \frac{K_T \cdot K_A \cdot K_t}{\alpha} \right) \cdot \omega_C = K_T \cdot K_A \cdot r$$



Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos

$$K_T \cdot K_A \cdot R(s) = L_a \cdot J \cdot s^2 \cdot \Omega_C(s) + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot s \cdot \Omega_C(s) + \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} \right) \cdot \Omega_C(s)$$

$$G_{MI}(s) = \frac{\Omega_C(s)}{R(s)} = \frac{K_T \cdot K_A}{L_a \cdot J \cdot s^2 + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot s + R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2}}$$

$$G_{MI}(s) = \frac{\Omega_C(s)}{R(s)} = \frac{0,5 \cdot K_A}{1,63125 \cdot s^2 + 1957,52 \cdot s + 23,4250}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{\Omega_C(s)}{R(s)} = \frac{G_{MI}(s)}{1 + G_{MI}(s) \cdot K_I / \alpha}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{\Omega_C(s)}{R(s)} = \frac{0,5 \cdot K_A}{1,63125 \cdot s^2 + 1957,52 \cdot s + 23,4250 + 16 \cdot K_A}$$

$$K_T \cdot K_A \cdot R(s) = L_a \cdot J \cdot s^2 \cdot \Omega_C(s) + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot s \cdot \Omega_C(s) + \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} + \frac{K_T \cdot K_A \cdot K_I}{\alpha} \right) \cdot \Omega_C(s)$$

$$G_{MF}(s) = \frac{\Omega_C(s)}{R(s)} = \frac{K_T \cdot K_A}{L_a \cdot J \cdot s^2 + (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \cdot s + \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} + \frac{K_T \cdot K_A \cdot K_I}{\alpha} \right)}$$

$$G_{MF}(s) = \frac{\Omega_C(s)}{R(s)} = \frac{0,5 \cdot K_A}{1,63125 \cdot s^2 + 1957,52 \cdot s + 23,4250 + 16 \cdot K_A}$$

$$x_1 = \omega_C$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\omega}_C$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_a \cdot J} \cdot \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} \right) & -\frac{1}{L_a \cdot J} \cdot (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T \cdot K_A}{L_a \cdot J} \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

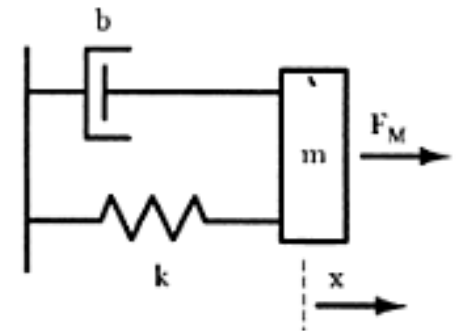
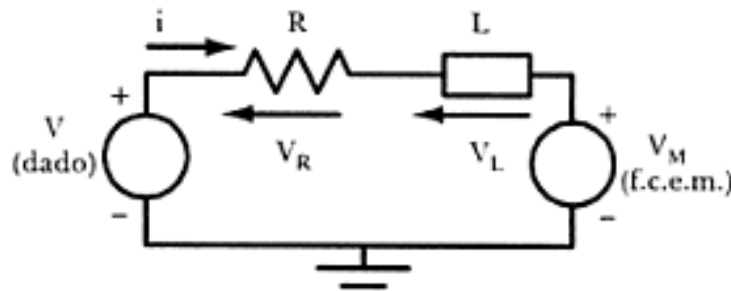
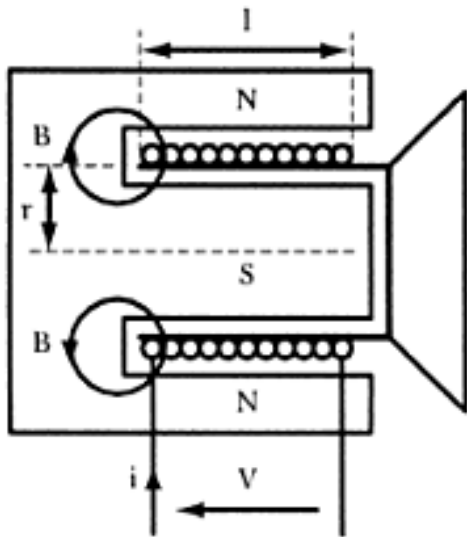
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14,3602 & -1200,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,306513 \cdot K_A \end{bmatrix} r$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos

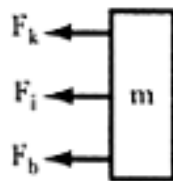
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_a \cdot J} \cdot \left(R_a \cdot B + \frac{K_T \cdot K_E}{\alpha^2} + \frac{K_T \cdot K_A \cdot K_t}{\alpha} \right) & -\frac{1}{L_a \cdot J} \cdot (R_a \cdot J + L_a \cdot B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T \cdot K_A}{L_a \cdot J} \end{bmatrix} r$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14,3602 - 9,80843 \cdot K_A & -1200,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,306513 \cdot K_A \end{bmatrix} r$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



(Força exercida pelas folhas do alto-falante)



(Força proveniente do acoplamento magnético)

$$V = V_R + V_L + V_M$$

$$F_M = F_k + F_i + F_b$$

$$V_R = R \cdot i \qquad V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$F_k = k \cdot x \qquad F_i = m \cdot \ddot{x} \qquad F_b = b \cdot \dot{x}$$

$$V_M = K \cdot \dot{x} \qquad F_M = K \cdot i$$

$$V = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + K \cdot \dot{x} \qquad K \cdot i = k \cdot x + b \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x}$$

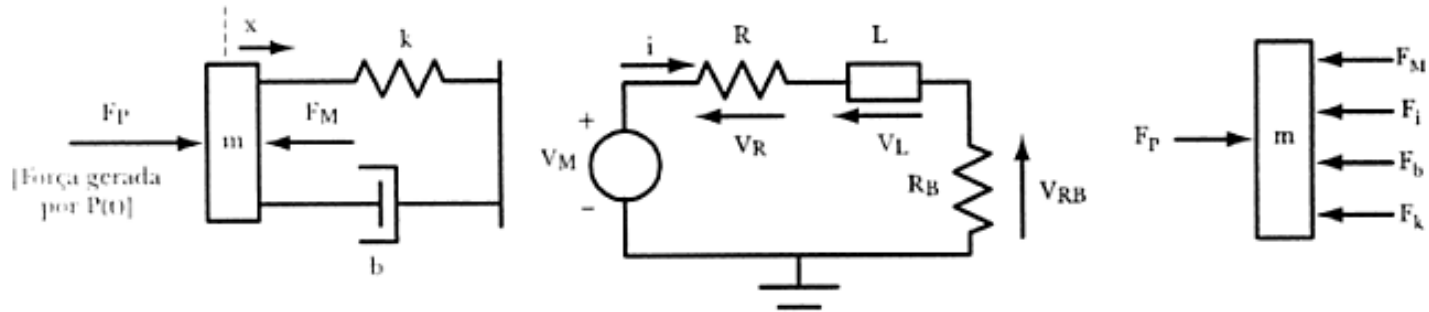
$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + K \cdot \dot{x} = V$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x - K \cdot i = 0$$

Entrada fornecida: $V(t)$

Saídas a serem calculadas: $i(t)$ e $x(t)$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



$$V_M = V_{RB} + V_L + V_R$$

$$F_P = F_M + F_k + F_i + F_b$$

$$V_{RB} = R_B \cdot i \quad V_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad V_R = R \cdot i$$

$$F_P = P \cdot A \quad (\text{onde } A = \text{área do diafragma do microfone})$$

$$F_k = k \cdot x \quad F_i = m \cdot \ddot{x} \quad F_b = b \cdot \dot{x}$$

$$V_M = K \cdot \dot{x} \quad F_M = K \cdot i$$

$$K \cdot \dot{x} = R_B \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i$$

$$P \cdot A = k \cdot x + m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + K \cdot i$$

$$L \cdot \frac{di}{dt} + (R_B + R) \cdot i - K \cdot \dot{x} = 0$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x + K \cdot i = P \cdot A$$

Entrada fornecida: $P(t)$

Saídas a serem calculadas: $i(t)$ e $x(t)$

CÁLCULO DA INDUTÂNCIA DA BOBINA

$$L = \mu \cdot N^2 \frac{A}{l}$$

onde:

μ = permeabilidade do material nas vizinhanças da bobina (neste caso é ferro)

N = número de espiras

A = área transversal onde está enrolada a bobina = $\pi \cdot r^2$

l = comprimento da bobina = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot N$

$$\therefore L = \frac{\mu_{Fe} \cdot N \cdot r}{2} \quad (\text{Henry})$$

CÁLCULO DA RESISTÊNCIA DA BOBINA

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

onde:

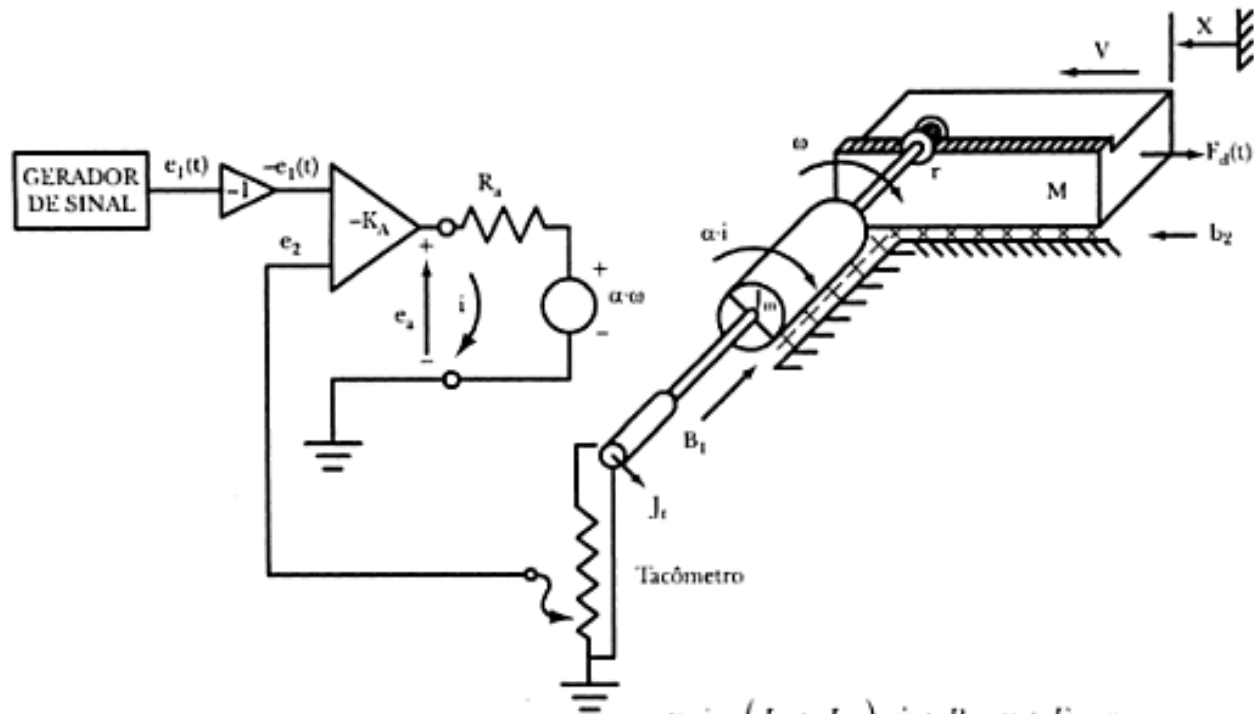
ρ = resistividade do fio

l = comprimento da bobina = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot N$

S = área transversal do fio da bobina = $\pi \cdot r_f^2$, sendo r_f o raio do fio da bobina

$$\therefore R = \frac{2 \cdot \rho \cdot r \cdot N}{r_f^2}$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



$$e_a = R_a \cdot i + \alpha \cdot \omega$$

$$\alpha \cdot i = (J_t + J_m) \cdot \dot{\omega} + B_1 \cdot \omega + F_C \cdot r$$

$$F_C = M \cdot \dot{v} + b_2 \cdot v + F_d$$

$$e_2 = K_T \cdot \omega$$

$$e_a = -K_A \cdot (-e_1 + e_2) = K_A \cdot (e_1 - e_2)$$

$$v = r \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$K_A \cdot (e_1 - K_T \cdot \omega) = R_a \cdot i + \alpha \cdot \omega$$

$$\alpha \cdot i = (J_t + J_m) \cdot \dot{\omega} + B_1 \cdot \omega + F_C \cdot r$$

$$F_C = M \cdot \dot{\omega} \cdot r + b_2 \cdot \omega \cdot r + F_d$$

$$(K_A \cdot K_T + \alpha) \cdot \omega + R_a \cdot i = K_A \cdot e_1$$

$$(J_t + J_m) \cdot \dot{\omega} + B_1 \cdot \omega + F_C \cdot r - \alpha \cdot i = 0$$

$$M \cdot \dot{\omega} \cdot r + b_2 \cdot \omega \cdot r - F_C = -F_d$$

Entradas fornecidas: $e_1(t)$ e $F_d(t)$

Saídas a serem calculadas: $\omega(t)$, $i(t)$ e $F_C(t)$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos

$$\alpha \cdot i = (J_l + J_m + M \cdot r^2) \cdot \dot{\omega} + (B_1 + b_2 \cdot r^2) \cdot \omega + r \cdot F_d = J \cdot \dot{\omega} + B \cdot \omega + r \cdot F_d$$

$$J = J_l + J_m + M \cdot r^2 \quad \mathbf{e} \quad B = B_1 + b_2 \cdot r^2$$

$$i = \frac{e_a - \alpha \cdot \omega}{R_a}$$

$$\therefore \alpha \frac{e_a - \alpha \cdot \omega}{R_a} = J \cdot \dot{\omega} + B \cdot \omega + r \cdot F_d$$

$$\frac{\alpha}{R_a} e_a = J \cdot \dot{\omega} + \left(\frac{B + \alpha^2}{R_a} \right) \cdot \omega + r \cdot F_d$$

$$\frac{\alpha}{R_a} e_a = J \cdot s \cdot \omega + \left(\frac{B + \alpha^2}{R_a} \right) \cdot \omega + r \cdot F_d(s)$$

$$\therefore \omega(s) = \frac{\frac{\alpha}{R_a} e_a - r \cdot F_d}{J \cdot s + B + \frac{\alpha^2}{R_a}} \rightarrow \omega(s) = \frac{\frac{\alpha}{R_a \cdot J} e_a - \frac{r}{J} F_d}{s + \frac{B}{J} + \frac{\alpha^2}{R_a \cdot J}}$$

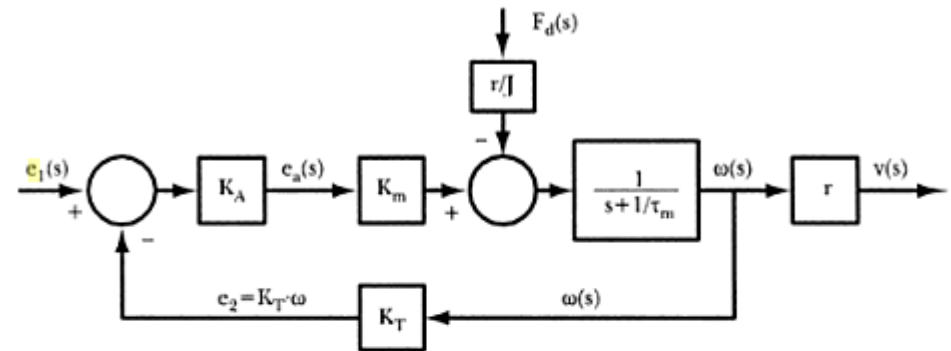
$$K_m = \frac{\alpha}{R_a \cdot J} \quad \tau_m = \frac{1}{\frac{B}{J} + \frac{\alpha^2}{R_a \cdot J}}$$

$$\omega(s) = \frac{K_m \cdot e_a(s) - \frac{r}{J} F_d(s)}{s + \frac{1}{\tau_m}}$$

$$e_a(s) = K_A \cdot (e_1 - K_T \cdot \omega)$$

$$v(s) = r \cdot \omega(s)$$

$$\therefore v(s) = r \cdot \left[\frac{K_m \cdot K_A \cdot \left(e_1(s) - K_T \frac{v(s)}{r} \right) - \frac{r}{J} F_d(s)}{s + \frac{1}{\tau_m}} \right] \quad (\text{em malha fechada})$$

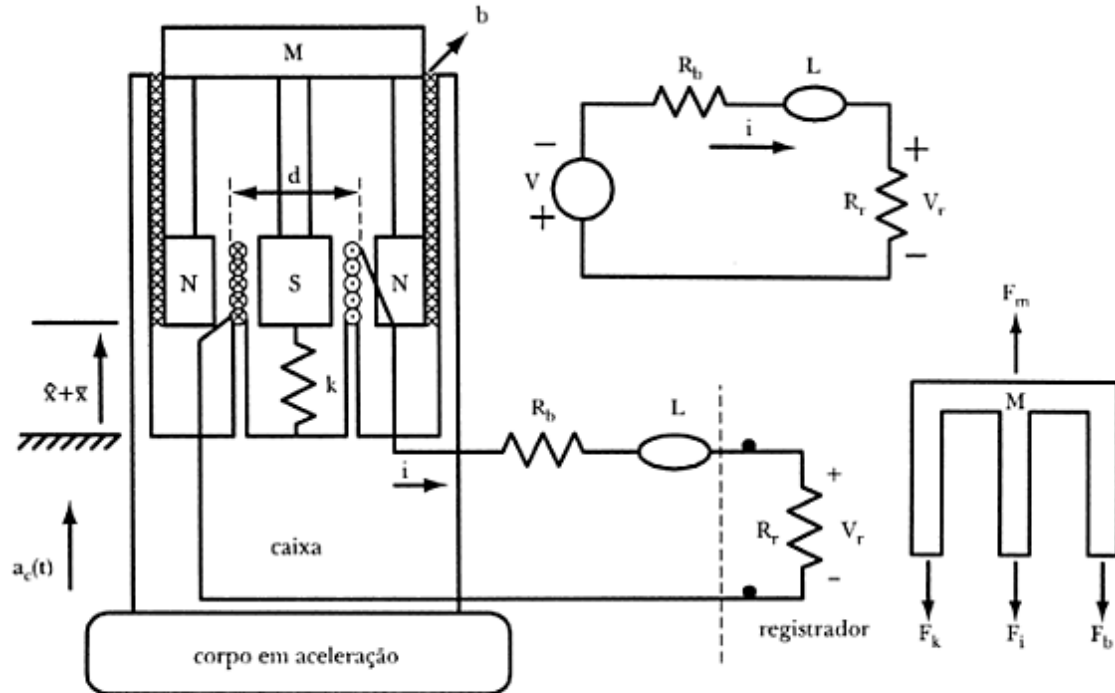


$$F_d(s) = 0,$$

$$\frac{v(s)}{e_1(s)} = \frac{r \cdot K_m \cdot K_A}{s + \frac{1}{\tau_m} + K_T \cdot K_m \cdot K_A}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{r \cdot K_m \cdot K_A}{s + \frac{1}{\tau_m} + K_T \cdot K_m \cdot K_A} \frac{1}{s} \right) = \frac{r \cdot K_m \cdot K_A}{\frac{1}{\tau_m} + K_T \cdot K_m \cdot K_A}$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



$$F_m = F_k + F_i + F_b$$

$$-V = R_b \cdot i + L \frac{di}{dt} + V_r$$

$$F_k = k \cdot x \quad F_b = b \cdot \dot{x}$$

$$F_i = M \cdot (\ddot{x} + a_c) \quad F_m = B \cdot l \cdot i$$

$$V = B \cdot l \cdot \dot{x} \quad V_r = R_r \cdot i$$

$$B \cdot l \cdot i = k \cdot x + b \cdot \dot{x} + M \cdot (\ddot{x} + a_c)$$

$$-B \cdot l \cdot \dot{x} = (R_b + R_r) \cdot i + L \frac{di}{dt}$$

$$M \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x - B \cdot l \cdot i = -M \cdot a_c$$

$$B \cdot l \cdot \dot{x} + (R_b + R_r) \cdot i + L \frac{di}{dt} = 0$$

Entradas fornecidas: $a_c(t)$

Saídas a serem calculadas: $x(t)$ e $i(t)$

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l} = \frac{\mu F_e \cdot N^2 \cdot \pi \cdot d^2}{4 \cdot N \cdot \pi \cdot d} = \frac{\mu F_e \cdot N \cdot d}{4}$$

$$R_b = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{\rho \cdot N \cdot \pi \cdot d}{\pi \cdot r_f^2} = \frac{\rho \cdot N \cdot d}{r_f^2}$$

onde r_f = raio do fio da bobina

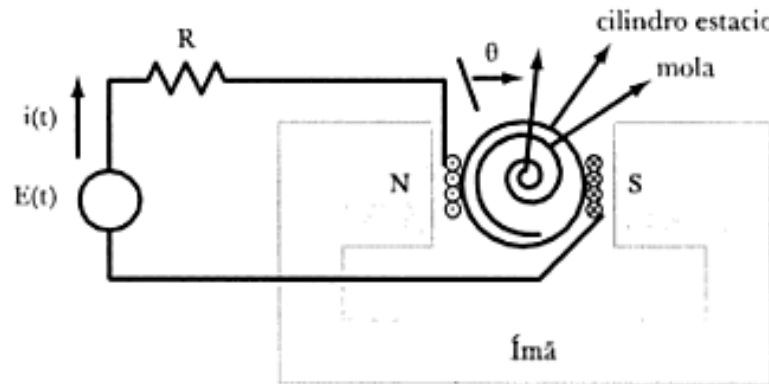
$$\left[M \cdot s^2 + b \cdot s + k \right] \cdot X(s) = -M \cdot A_c(s) + B \cdot l \cdot I(s)$$

$$-B \cdot l \cdot s \cdot X(s) = (R_b + R_r) \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s)$$

$$I(s) = \frac{V_r(s)}{R_r}$$

$$\frac{V_r(s)}{A_c(s)} = \frac{M \cdot B \cdot l \cdot R_r \cdot s}{(M \cdot s^2 + b \cdot s + k) \cdot (R_r + R_b + L \cdot s) + B^2 \cdot l^2 \cdot s}$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



$$E = E_R + E_L + E_m$$

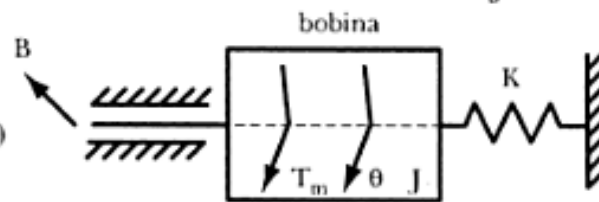
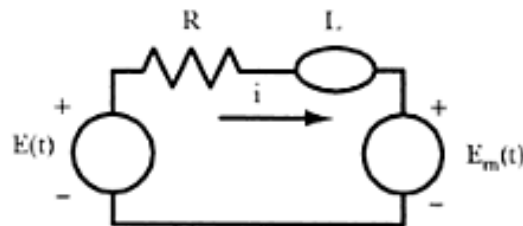
$$T_m = T_K + T_B + T_J$$

$$E_R = R \cdot i \quad E_L = L \frac{di}{dt} \quad E_m = k \cdot \dot{\theta}$$

$$T_m = k \cdot i \quad T_K = K \cdot \theta \quad T_B = B \cdot \dot{\theta} \quad T_J = J \cdot \ddot{\theta}$$

$$E = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + k \cdot \dot{\theta}$$

$$k \cdot i = K \cdot \theta + B \cdot \dot{\theta} + J \cdot \ddot{\theta}$$



onde:

B = combinação do atrito dos mancais e do ar

J = momento de inércia da bobina

K = constante da mola torcional

R = resistência das bobinas +
resistência externa ao galvanômetro

L = indutância total da bobina

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + k \cdot \dot{\theta} = E$$

$$J \cdot \ddot{\theta} + B \cdot \dot{\theta} + K \cdot \theta - k \cdot i = 0$$

Entradas fornecidas: $E(t)$

Saídas a serem calculadas: $i(t)$ e $\theta(t)$

$$F_m = B \cdot l \cdot i \quad (\text{por condutor})$$

$$F_m = 2 \cdot N \cdot B \cdot l \cdot i$$

$$T_m = F_m \cdot r$$

$$T_m = (2 \cdot N \cdot B \cdot l \cdot r) \cdot i$$

$$E_m = B \cdot l \cdot v \quad (\text{por condutor})$$

$$v = r \cdot \dot{\theta}$$

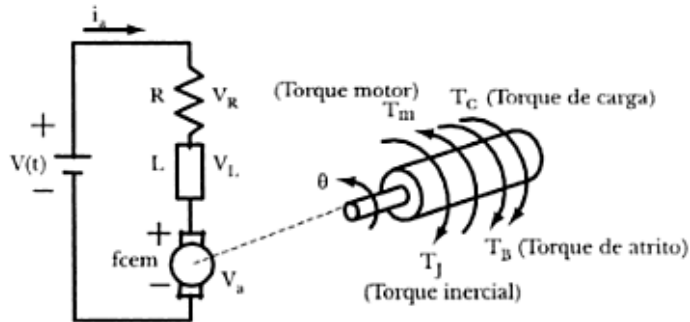
$$E_m = (2 \cdot N \cdot B \cdot l \cdot r) \cdot \dot{\theta}$$

(tensão induzida na bobina)

$$T_m = k \cdot i \quad E_m = k \cdot \dot{\theta}$$

$$k = 2 \cdot N \cdot B \cdot l \cdot r$$

Exemplos de modelagem de sistemas eletromecânicos



$$V = R \cdot i_a + L \frac{di_a}{dt} + k \cdot \dot{\theta} \quad (\text{para modo motor})$$

$$k \cdot \dot{\theta} = R \cdot i_a + L \frac{di_a}{dt} + V \quad (\text{para modo gerador})$$

$$k \cdot i_a = J \cdot \ddot{\theta} + B \cdot \dot{\theta} + T_C \quad (\text{para modo motor})$$

$$T_C = J \cdot \ddot{\theta} + B \cdot \dot{\theta} + k \cdot i_a \quad (\text{para modo gerador})$$

$$\theta_1 = \theta \quad \text{e} \quad \theta_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} = \theta_2$$

$$\dot{\theta}_2 = \ddot{\theta} = \frac{1}{J} (T_C - B \cdot \theta_2 - k \cdot i_a)$$

$$y = V = k \cdot \theta_2 - R \cdot i_a - L \frac{di_a}{dt}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -B/J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k/J \end{pmatrix} i_a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J \end{pmatrix} T_C \\ y = V = \begin{pmatrix} 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} - \left(R + L \frac{d}{dt} \right) i_a \end{cases}$$

$$V = V_R + V_L + V_a \quad (\text{para modo motor})$$

$$V_a = V_R + V_L + V \quad (\text{para modo gerador})$$

$$T_m = T_J + T_B + T_C \quad (\text{para modo motor})$$

$$T_C = T_J + T_B + T_m \quad (\text{para modo gerador})$$

$$V_R = R \cdot i_a \quad V_L = L \frac{di_a}{dt} \quad V_a = k \cdot \dot{\theta}$$

$$T_m = k \cdot i_a \quad T_J = J \cdot \ddot{\theta} \quad T_B = B \cdot \dot{\theta}$$

$$\theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = \dot{\theta} \quad \text{e} \quad i_a \quad \text{e a saída é } \theta$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} = \theta_2$$

$$\dot{\theta}_2 = \ddot{\theta} = \frac{1}{J} (k \cdot i_a - B \cdot \theta_2 - T_C)$$

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L} (V - R \cdot i_a - k \cdot \dot{\theta})$$

$$y = \theta_1 = \theta$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ i_a \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B/J & k/J \\ 0 & -k/L & -R/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ i_a \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/J \\ 0 \end{pmatrix} T_C + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{pmatrix} V \quad y = \theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ i_a \end{pmatrix} \end{cases}$$

Conclusões

- Com os assuntos estudados nesta aula o engenheiro de controle de processos ou eletricitista será capaz de:
 - Conhecer os elementos e propriedades de sistemas eletromecânicos como máquinas rotativas;
 - Modelar alguns sistemas eletromecânicos.

Referências

- Claudio Garcia – Modelagem e simulação - 2005 – EDUSP;